УДК 621.323

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЦЕНТРАЛЬНЫМ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ С ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

Р.К. Калбиев

Азербайджанский архитектурно-строительный университет, г. Баку
E-mail: elektroset@box.az

Работа посвящена изучению напряженного состояния шестиугольной пластинки, ограниченной снаружи шестиугольным контуром, а изнутри центрально расположенным отверстием, близким к круговому. На основе методов теории функции комплексного переменного и конформного отображения рассмотрено напряженное состояние для неодносвязных областей. Искомые функции ищутся в виде степенных рядов, коэффициенты которых определяются решением совокупности некоторых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Работоспособность деталей машин и элементов конструкций в виде пластин зависит от наличия в них концентратов напряжений типа полостей, щелей, шероховатостей и т.д. Поэтому изучение распределения напряжений и деформаций около таких дефектов представляет теоретический и практический интерес.

Как известно, в отличие от идеальной, изображаемой на чертежах, реальная поверхность тел (деталей) никогда не бывает абсолютно гладкой, а всегда имеет микро- или макроскопические неровности, образующие шероховатость. Качество обработки поверхности деталей машиностроении существенно влияет на их прочность. Так, например,

повышение чистоты обработки при прочих равных условиях увеличивает статическую прочность, особенно хрупкую, и, в большей степени, предел выносливости. Эти факты объясняются влиянием микрогеометрии обработанной поверхности на напряженное поле. Таким образом, неровности, образующиеся при обработке рабочей поверхности, являются эффективными концентраторами напряжений и могут в несколько раз снижать прочность.

Исследуем однородную изотропную пластинку, состоящую из двухсвязной области S, ограниченной снаружи шестиугольным контуром L_1, а изнутри центрально расположенным отверстием, близким к круговому L_2 (рис. 1).

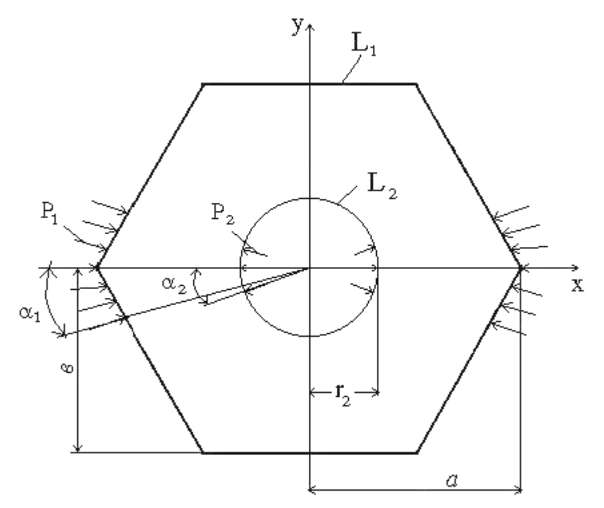


Рис. 1. *Шестиугольная пластинка, ослабленная центральным круглым отверстием с шероховатостью*

Введем полярную систему координат. Представим границу внутреннего контура пластинки в следующем виде (рис. 2):

$$\rho(\theta)=r2+\delta(\theta),$$

где θ – аргумент точки контура L_2.

Запишем второе слагаемое в правой части уравнения в виде $\delta(\theta)=\varepsilon H(\theta)$. Здесь ε – малый параметр, равный отношению высоты наибольшего выступа профиля к радиусу отверстия или отношению глубины наибольшего отступа профиля к радиусу отверстия; $H(\theta)$ – функция, независимая от малого параметра.

Компоненты тензора напряжений ищем в виде разложений по малому параметру ε:

$$\begin{aligned}\sigma_r&=\sigma_r^{(0)}+\varepsilon\sigma_r^{(1)}+...,\\ \sigma_\theta&=\sigma_\theta^{(0)}+\varepsilon\sigma_\theta^{(1)}+...,\\ \tau_{r\theta}&=\tau_{r\theta}^{(0)}+\varepsilon\tau_{r\theta}^{(1)}+...,\end{aligned}\qquad(1)$$

в которых для упрощения задачи пренебрегаем членами, содержащими малый параметр ε в степени выше первой. В соотношениях (1) $\sigma_r^{(0)}$, $\sigma_\theta^{(0)}$ и $\tau_{r\theta}^{(0)}$ – напряжения нулевого приближения, а $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\theta^{(1)}$ и $\tau_{r\theta}^{(1)}$ – напряжения первого приближения. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений равновесия.

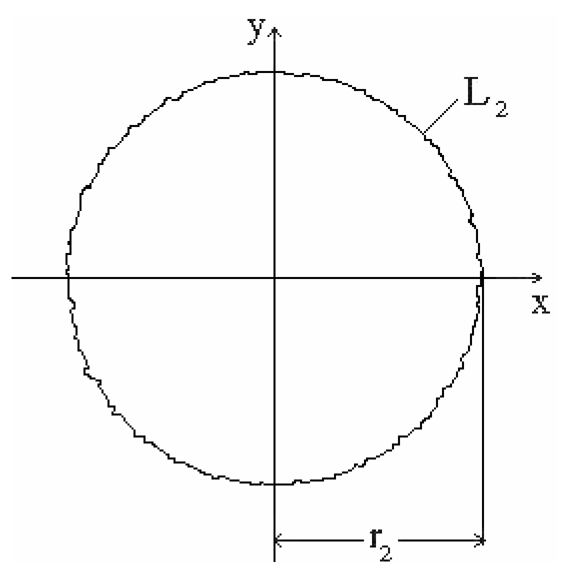


Рис. 2. *Шероховатость внутреннего контура*

Граничное условия на внешнем шестиугольном контуре будут [1] в нулевом приближении такие же, как в исходной задаче

$$f_1^{(0)}(t)=f_1(t)$$

и в первом приближении будут нулевыми

$$f_1^{(1)}(t)=0.$$

Значения компонент напряжений ($\sigma_r^{(0)}$, $\sigma_\theta^{(0)}$, $\tau_{r\theta}^{(0)}$, $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\theta^{(1)}$, $\tau_{r\theta}^{(1)}$) при $r=\rho(\theta)$ найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r=r_2$.

$$\sigma_r^{(0)}\Big|_{r=\rho}=\sigma_r^{(0)}\Big|_{r=r_2}+\frac{\partial\sigma_r^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=r_2}\varepsilon H(\theta)+...$$

$$...\qquad(2)$$

$$\tau_{\theta r}^{(1)}\Big|_{r=\rho}=\tau_{\theta r}^{(1)}\Big|_{r=r_2}+\frac{\partial\tau_{\theta r}^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=r_2}\varepsilon H(\theta)+...$$

Граничные условия на контуре L_2 представим в виде

$$\sigma_n=\sigma_r\cos^2\varphi+\sigma_\theta\sin^2\varphi-2\tau_{r\theta}\sin\varphi\cos\varphi=0,$$

$$\tau_{nt}=(\sigma_\theta-\sigma_r)\sin\varphi\cos\varphi+\tau_{r\theta}(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)=0.\qquad(3)$$

Если взять $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ с точностью до величин первого порядка малости и подставить выражения (2) в граничные условие (3), то после преобразования краевые условия при $r=r_2$ получим в следующем виде:

$$\sigma_r^{(0)}=0;\ \tau_{r\theta}^{(0)}=0,$$

$$\sigma_r^{(1)}+H(\theta)\frac{\partial\sigma_r^{(0)}}{\partial r}-2\tau_{r\theta}^{(0)}\frac{1}{r_2}\frac{dH(\theta)}{d\theta}=0,$$

$$\tau_{\theta r}^{(1)}+H(\theta)\frac{\partial\tau_{\theta r}^{(0)}}{\partial r}-(\sigma_\theta^{(0)}-\sigma_r^{(0)})\frac{1}{r_2}\frac{dH(\theta)}{d\theta}=0.\qquad(4)$$

Решение в нулевом приближении является известным. При этом на контуры пластинки действуют кусочно-равномерно распределенные нагрузки с интенсивностями P_1 и P_2 соответственно под углом $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$ (рис. 1).

Перейдем далее к представлению компонент напряжения при помощи функций φ, ψ. С этой целью найдем выражение для усилия, действующего на элемент какого-либо профиля, проведенного в плоскости Oxy.

Рассмотрим на этой плоскости какую-либо дугу AB. Для определенности припишем ей некоторое положительное направление, а именно от A к B, и будем проводить нормаль n к ней вправо по отношению к наблюдателю, движущемуся в положительном направлении. Иными словами, предположим, что положительные направления нормали и касательной расположены друг относительно друга так же, как направления осей Ox, Oy (рис. 3). Под усилием ($X_n ds$, $Y_n ds$), действующим на элемент ds дуги контура, будем, как всегда, подразумевать усилие, действующее со стороны положительной нормали [1].

Найдем выражение для главного вектора усилий, приложенных к данной дуге AB, расположенной в области S, занятой телом. Обозначим через (X, Y) главный вектор.

Если считать точку A зафиксированной, а точку B – переменной, и обозначить ее аффикс через $z=x+iy$, получим:

$$\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)}=i\int_{AB}(X_n+iY_n)ds+\text{const}=$$
$$=i(X+iY)+\text{const}, \qquad (5)$$

где (X, Y) представляет собой главный вектор усилий, приложенных со стороны положительной нормали к произвольной дуге, соединяющей фиксированную точку A с переменной точкой $B(x, y)$, причем положительная нормаль считается обращенной вправо по отношению к наблюдателю, движущемуся по рассматриваемой дуге от A к B (рис. 3).

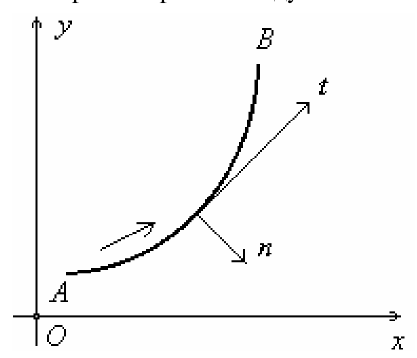


Рис. 3. *Представление компоненты напряжений*

В случае задачи I граничное условие можно выразить двумя различными способами. Мы укажем только один из них. Способ, на котором мы остановимся, заключается в следующем. Пусть $X_n(t)$, $Y_n(t)$ или, при иных обозначениях, $X_n(s)$, $Y_n(s)$, – заданные значения компонент внешнего напряжения в данной точке t контура; через s обозначена, как всегда, дуга контура, соответствующая точке t, отсчитываемая в положительном направлении от некоторой фиксированной точки t_0. За положительное направление на L примем то, что остается в области S слева.

На основании формулы (5) имеем:

$$\phi(t)+t\overline{\phi'(t)}+\overline{\psi(t)}=i\int_{t_0}^{t}(X_n+iY_n)ds=$$
$$=i\int_0^s(X_n+iY_n)ds. \qquad (6)$$

Выражение в левой части формулы (6) следует понимать как граничное значение выражения

$$\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)}$$

при стремлении z к точке t контура L. Это граничное значение, как легко видеть, существует вследствие принятого нами условия относительно непрерывности компонент напряжения вплоть до контура L. Заметим еще, что формулу (6) мы написали, опираясь на формулу (5), которая была выведена в предположении, что дуга, обозначенная через AB, целиком расположена в S. Однако, как легко видеть, в нашем случае последняя формула применима и тогда, когда дуга AB принадлежит границе L; это вытекает из того же условия непрерывности компонент напряжения вплоть до границы [1].

Таким образом, граничное условие задачи I выражается формулой (6), понимаемой в указанном выше смысле.

Как известно [1], определение напряженного состояния в данной области приводиться к нахождению двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексных переменных, удовлетворяющих определенным граничным условиям на L_j:

$$\phi(t)+\ \overline{\phi(t)}+\overline{\psi(t)}=f_j(t)+C_j,\ t\in L_j,\ (j=1,2). \quad (7)$$

Здесь t – аффикс точек контура L_j; C_j – вещественные постоянные (одну из которых, например C_1, примем равной нулю, а C_2 подлежит определению). $f_1(t)$ примем в виде степенного ряда, т.е.

$$f_1(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}H_\nu^{(1)}\tau^\nu,\quad f_1(t)=0, \qquad (8)$$

где $\tau=e^{i\theta}$, τ – аффикс, а θ – аргумент точки контура единичной окружности, определяются из условия непрерывности функций $f_j(t)$ на контуре L_1.

Аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в трехсвязной области S ищем в виде

$$\phi(z)=\sum_{\kappa=0}^{N}a_\kappa^{(1)}\left(\frac{z}{A}\right)^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}e_\kappa^{(1)}\left(\frac{r_2}{z}\right)^\kappa,$$
$$(z)=\sum_{\kappa=0}^{N}A_\kappa^{(1)}\left(\frac{z}{A}\right)^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}E_\kappa^{(1)}\left(\frac{r_2}{z}\right)^\kappa. \qquad (9)$$

На основе геометрических и силовых симметрий (это есть условие равенства нулю главного момента внешних усилий) коэффициенты $a_\kappa^{(1)}$, $e_\kappa^{(1)}$, $A_\kappa^{(1)}$, $E_\kappa^{(1)}$ ($\kappa=\overline{0,\infty}$) будут вещественными [1]. N – верхний предел суммы. Выбирается в зависимости от точности, с которой желательно получить искомое решение. Формально, лишь с целью несколько облегчить математические выкладки, верхний предел возьмем равным бесконечности, в последующем, для иллю-

страции решения фактически будем рассматривать лишь укороченные системы; $A=\frac{a+в}{2}$.

Внешность правильного многоугольника L_1, как известно, отображается на внешность единичного круга в плоскости ξ с помощью следующей функции [3]

$$z=A\tau\left(1+\frac{m}{\tau^q}\right), \qquad (10)$$

где $|m|=\frac{a-в}{a+в}$, a и $в$ соответственно радиусы окружностей, описанных вокруг многоугольника и вписанных в многоугольник L_1; q – число осей симметрии (число сторон), q=6.

Знак m определяет форму расположения контура L_1 в плоскости $z=x+iy$.

Когда $m>0$, большая ось симметрии многоугольника совпадает с осью абсцисс, а когда $m<0$, то малая ось симметрии многоугольника совпадает с осью абсцисс. Очевидно, что в (4) при $m=0$ контур L_0 превращается в окружность, а при $q=2$ в эллипс. При $q>2$ абсолютное значение m может быть определено по формуле:

$$|m|=\frac{1}{(q-1)^2},$$

и для шестиугольника q=6; m=1/25.

Далее, принимая во внимание (8), (9) и (10) в граничных условиях (7) на L_j (j=1, 2), производятся математические выкладки с таким расчетом, чтобы из преобразованных краевых условий можно было бы сравнить коэффициенты при одинаковых степенях соответствующих переменных.

Таким образом, в конечном итоге, определение коэффициентов $a_к^{(1)}$, $e_к^{(1)}$, $A_к^{(1)}$, $E_к^{(1)}$, $(к=\overline{0,N})$ разложений в (9), сведено к решению четыре групп взаимосвязанных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

После этого по формуле Колосова-Мусхелешвили определяются компоненты напряжений σ_r, σ_θ в точках произвольно взятых центральных сечений пластинки:

$$\sigma_r^{(0)}+\sigma_\theta^{(0)}=4\,\mathrm{Re}[\phi\,'(z)],$$

$$\sigma_r^{(0)}+\sigma_\theta^{(0)}+\;2i\tau_{\theta r}^{(0)}\;=2[\;\bar{z}\phi\,''(z)+\;\psi\,''(z)]e^{2i\theta}. \qquad (11)$$

Перейдем к решению задачи в первом приближении [2].

Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\phi_1(t)+\overline{\phi_1(t)}+\overline{\psi_1(t)}=f_j^{(1)}(t)+C_j^{(1)},\, t\in L_j\,,\,(j=1,2),$$

$$f_1(t)=0,\; f_2^{(1)}(t)=-ir_2\int_0^\theta (X_n+iY_n)d\theta,\,(j=1,2),$$

где $t=r_2e^{i\theta}$.

$$X_n+iY_n=-(N+iT)e^{i\theta}.$$

Будем считать заданными нормальную и касательную компоненты N и T внешнего напряжения, действующего на границу L_2 (если заданы X_n, Y_n, то тем самым будут заданы N, T, и обратно). Мы будем считать, что N представляет собой проекцию напряжения, приложенного к дуге границы, на внешнюю нормаль n, а T – проекцию того же напряжения на касательную к границе, направленную влево, если смотреть вдоль n.

При $r=r_2$, из выражения (4)

$$N=\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=r_2}=-H(\theta)\frac{\partial\sigma_r^{(0)}}{\partial r}+2\tau_{r\theta}^{(0)}\frac{1}{r_2}\frac{dH(\theta)}{d\theta},$$

$$T=\tau_{\theta r}^{(1)}\Big|_{r=r_2}=-(\sigma_\theta^{(0)}-\sigma_r^{(0)})\frac{1}{r_2}\frac{dH(\theta)}{d\theta}-H(\theta)\frac{\partial\tau_{\theta r}^{(0)}}{\partial r}.$$

Для каждого профиля обработанной поверхности (реализация шероховатой поверхности) внутреннего контура пластинки функцию $H(\theta)$ можно разложить в степенной ряд на отрезке [0; 2π]. Используя формулы (11), разложение функции $H(\theta)$, представим правую часть краевого условия $f_2^{(1)}(t)$ в виде степенного ряда при $r=r_2$

$$f_2^{(1)}(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}H_\nu^{(2)}\tau^\nu;\quad \tau=e^{i\theta}.$$

Исследование распределения напряжений возле границ пластинки с неровностями на контуре можно проводит в детерминистической и случайной постановке. Для расчетов и был принят следующий закон распределения шероховатости:

$$H(\theta)=d\cos\frac{2\pi\theta}{l}, \qquad (12)$$

d – высота выступов, а l – шаг.

Дальнейший ход решения задачи аналогичен нулевому приближению. Для удобства в первом приближении сохранены обозначения для искомых коэффициентов. Таким образом, в первом приближении для определения коэффициентов $a_к^{(1)}$, $e_к^{(1)}$, $A_к^{(1)}$, $E_к^{(1)}$, $(к=\overline{0,N})$ получены 4 групп бесконечных систем линейно алгебраических уравнений, отличающихся от нулевого (что очень удобно при расчетах на ПЭВМ) правых частей системы.

Полученные решения в зависимости от параметров шероховатости (12), геометрических ($r_2/в$) и силовых факторов (P_1, P_2, α_1, α_2) можно распространить на решение многочисленных частных задач.

В случае, когда пластинка подвержена наружному давлению при α_1=30°, α_2=90°, $P_1=P$, P_2=0, ε=0 (в нулевом приближении), ε=0,04, $r_2/в$=0,5 (рис. 4) определены компоненты напряжений σ_r, σ_θ в сечении x=0. В характерных точках проверены граничные условия и выяснено, что наибольшее отклонение не превышает 1 %.

Нами были рассмотрены следующие конкретные примеры:

α_1=90°, $P_1=P$, P_2=0, ε=0,04, $r_2/в$=0,5 (рис. 4, *а*).

α_1=30°, $P_1=P$, P_2=0, ε=0,04, $r_2/в$=0,5 (рис. 4, *б*).

α_1=30°, $P_1=P$, P_2=0, ε=0, $r_2/в$=0,5 (рис. 4, *в*).

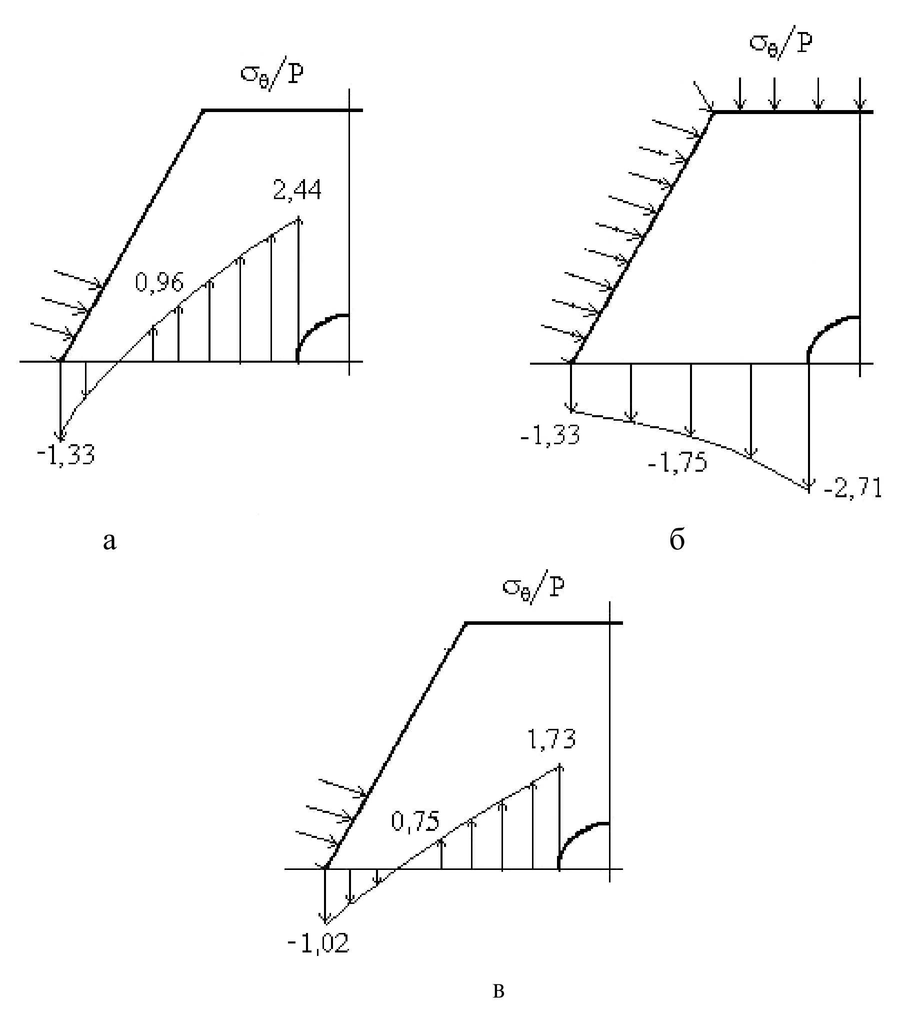


Рис. 4. *Эпюры касательных напряжений*

Выводы

Анализ численных примеров показывает, что влияние шероховатости сказывается на увеличении коэффициентов концентрации напряжений, это влияние имеет место в поверхностном слое, не превышающем утроенного размера максимальной впадины или выступа. Отношения кратчайшего расстояния от центра отверстий до наружного контура к радиусу отверстий ($в/r_2$) имеют существенное влияние на концентрацию напряжений. Когда отношение $r_2/в$ увеличивается, показатели шероховатости ε существенно влияют на концентрации напряжений. Показано, что с увеличением показателя шероховатости ε концентрация напряжений вначале постепенно, а в дальнейшем резко увеличивается. Это на внутреннем контуре более существенно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 648 с.
2. Калбиев Р.К. Исследование напряженного состояние в квадратной пластинке, ослабленной двумя круглыми отверстиями с шероховатостью, под действием кусочно-равномерно распределенных контурных нагрузок // Ученые записки АзИСУ (Баку). – 2000. – № 1, 2. – С. 240–244.
3. Кулиев С.А. Двумерные задачи теории упругости. – М.: Стройиздат, 1991. – 351 с.